ЛА Каспарян 19.11.12

Сума на ПП-ва. Директна сума

Th1 за размерността на сума и сечение

Ако U и W са крайномерни ПП-ва на ЛП V, то образуваме $U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ и $U \cap W$ са крайномерни ПП-ва на V и техните размерности са

Ф $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Док-во

Нека $a_1 \dots a_k$ е базис на $U \cap W$, допълване до базис $a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m \in U$ и базис $a_1 \dots a_k, c_1 \dots c_n \in W$

Достатъчно е да докажем че $a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m, c_1 \dots c_n$ е базис на $U+W$. Наистина $U+W = \ell(a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m) + \ell(a_1 \dots a_k c_1 \dots c_n) = \ell(a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m, c_1 \dots c_n)$

За ЛНЗ-ст на $a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m, c_1 \dots c_n$ разглеждаме

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{m} y_j b_j + \sum_{s=1}^{n} z_s c_s \quad ; x_i, y_j, c_s \in F$$

Тогава $\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{m} y_j b_j = \sum_{s=1}^{n} (-z_s) c_s \in$

$$\ell(a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m) \cap \ell(c_1 \dots c_n) \subseteq U \cap W = \ell(a_1 \dots a_k)$$

$\exists$-ват числа $t_1 \dots t_k \in F$ такива че

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{m} y_j b_j = \sum_{s=1}^{n} (z_s) c_s = \sum_{\ell=1}^{k} t_\ell a_\ell$$

но от $\sum_{\ell=1}^{k} t_\ell a_\ell + \sum_{s=1}^{n} z_s c_s = \vec{0}$ следва

$t_1 = \dots = t_k = 0$ и $z_1 = \dots = z_n = 0$ съгласно ЛНЗ-ст на базиса $a_1 \dots a_k, c_1 \dots c_n$ на W. Сега от $\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{m} y_j b_j = \vec{0}$ следва $x_1 = \dots = x_k = 0$ и $y_1 = \dots = y_m = 0$ поради

ЛНЗ-ст на базиса $a_1 - a_k, b_1 - b_m$ на U. Тъва установява ЛНЗ-ст на системата $a_1 - a_k, b_1 - b_m, c_1 - c_n$ и доказва че тази система е базис на $U+W$

Директна сума

Сумата на ПП-ва $V_1 + \dots + V_n \{v_1 \dots v_n | v_i \in V_i\}$ е директна сума, ако всеки вектор v от тази сума има единствено представяне $v = V_1 + \dots + V_n$ като сумата на вектори $v_i \in V_i$

Директните суми означаваме със огражване на знакът плюс $\oplus$. $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \dots \oplus V_n$

Т6!

Сумата на ПП-ва $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ е директна $\iff V_i \cap (\sum_{I \neq i} V_I) = \{\vec{0}\}$ за $\forall 1 \leq i \leq n$.

Док-во

Ако сумата $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ е директна и $v_i = \sum_{I \neq i} v_I \in V_i \cap (\sum_{I \neq i} V_I)$ то $\sum_{I \neq i} v_I + (-1) v_i = \vec{0}$ е представяне на $\vec{0}$ с $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ като сума на вектори от $V_1 \dots V_n$. Съгласно единствеността на такова представяне имаме $V_I = \vec{0}$ за $\forall I \neq i$ и $-v_i = \vec{0}$ т.е. $v_i = 0$

обратно

Нека $V_i \cap \sum_{I \neq i} V_I = \{\vec{0}\}$ за $\forall 1 \leq i \leq n$. Ако

$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$ с $v_i, w_i \in V_i$ са две представяния на вектори от $V_1 \dots V_n$ като сума от вектори от V_i, то $\sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i) = \vec{0}$ или $v_i - w_i =$

$$= \sum_{I \neq i} (w_I - v_I) \in V_i \cap (\sum_{I \neq i} V_I) = \{\vec{0}\}$$

Следователно $v_i = w_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$

Това доказва че сумата е директна

ТС1

Зависимост между разлагания в директна сума на ПП-ва и разбиване на базиси

(i) Ако $e_1 - e_n$ е базис на ЛПП V, то за $\forall\ 1 \le k \le n-1$ имаме разлагане $V = \ell(e_1 - e_k) \oplus \ell(e_{k+1}, \dots e_n)$

(ii) Ако $V = V_1 \oplus V_2$ е ДС на V_1 и V_2, $e_1 - e_k$ е базис на V_1, $e_{k+1} - e_n$ е базис на V_2 то $e_1 - e_k, e_{k+1} - e_n$ е базис на V

Док-во

(i) Ако $e_1 - e_n$ е базис на V то $V = \ell(e_1 - e_k, e_{k+1} - e_n) = \ell(e_1 - e_k) + \ell(e_{k+1} - e_n)$ т.е. V е сума на ПП-ната $\ell(e_1 - e_k)$ и $\ell(e_{k+1} - e_n)$. Ако $\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{J=1}^{n} y_J e_J \in \ell(e_1 - e_k) \cap \ell(e_{k+1} - e_n)$ то $\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{J=1}^{n} (-y_J) e_J = \vec{0}$

Съгласно ЛНЗ-ст на базис $e_1 - e_n$ на $V \Rightarrow$ $x_1 = \dots = x_k = 0$ и $y_{k+1} = \dots = y_n = 0$. Следователно $\ell(e_1 - e_k) \cap \ell(e_{k+1} - e_n) = \{\vec{0}\}$ и $V = \ell(e_1 - e_k) \oplus \ell(e_{k+1} - e_n)$

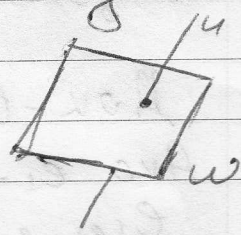
(ii) Нека $V = V_1 \oplus V_2$, $e_1 - e_k$ е базис на V_1 и $e_{k+1} - e_n$ е базис на V_2. Тогава $V = \ell(e_1 - e_k) + \ell(e_{k+1} - e_n) = \ell(e_1 - e_k, e_{k+1} - e_n)$. За ЛНЗ-ст на $e_1 - e_n$ да разгледаме $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \vec{0}$. Тогава $\sum_{J \ne k+1} (-x_J) e_J + \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in \ell(e_1 - e_k) \cap \ell(e_{k+1} - e_n) = V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$. Оттук следва $x_1 = \dots = x_k = 0$. Съгласно ЛНЗ-ст на $e_1 - e_k$ и $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ съгласно ЛНЗ-ст на $e_{k+1} - e_n$. По този начин доказахме че $e_1 - e_n$ са ЛНЗ-ни а оттам и базис на $\text{ЛП}V = \ell(e_1 - e_n)$

Следствие

Нека V е нетривиално крайномерно пространство. Ще нетривиално ПП-во на V. Тогава $\exists$ ПП-во

U на V така че $V = W + U$. ПП-вата U със това св-во не са еднозначно определени и се нарича допълнения на W до V

!!! Допълнението на ПП-во W до V не е единствено
Например ако $V = \mathbb{R}^3$, W е права през началото в $\mathbb{R}^3$ то всички равнини през началото U не съдържащи W са допълнения на W до $\mathbb{R}^3$.
Аналогично ако $V = \mathbb{R}^3$, W е равнина през началото то всяка права U в $\mathbb{R}^3$ през началото нележаща в W е допълнение на W до $\mathbb{R}^3$



Ранг на система вектори - Ранг на матрица

Деф
Вектори $v_1 - v_m$ имат ранг r, ако ∃ r-бр от ЛНЗ-ни $b_1 - b_r$ измежду тях и произволни $r+1$ вектори $b_{i_1} - b_{i_{r+1}}$, $1 \le i_1 < \dots < i_{r+1} \le m$ измежду тях които са ЛЗ-ни. Записваме
$\text{rk}(b_1 - b_m) = r$
Следните условия са еквивалентни за вектори $b_1 - b_m$ от ПП V
(i) $\text{rk}(b_1 - b_m) = r$
(ii) ∃ r ЛНЗ-ни вектора $b_1 - b_r$ измежду тях и $C(b_1 - b_m) = C(b_1 - b_r)$
(iii) ∃ r-бр от r ЛНЗ-ни вектора $b_1 - b_r$ измежду тях и всички останали т.е. $b_{r+1} - b_m$ са във тяхната обвивка. По този начин ранг $\text{rk}(b_1 - b_m) = \dim C(b_1 - b_m)$ на система вектори $b_1 - b_m$ е размерността на линейната обв.

(i) => (ii) сдоцуване на предното
Нека $b_1 - b_k$ са ЛНЗ-ми, произволни $b_{i_1} - b_{i_{t+1}}$ с $1 \le i_1 < \dots < i_{t+1} \le m$ са ЛЗ-ми и $\ell(b_1 - b_k) \subsetneq \ell(b_1 - b_m)$. Ако $b_{t+1} - b_m \in \ell(b_1 - b_k)$ то $b_1 - b_k, b_{t+1} - b_m \subseteq \ell(b_1 - b_k) \Rightarrow \ell(b_1 - b_m) \subseteq \ell(b_1 - b_k) \subseteq \ell(b_1 - b_m)$. По лемата за ЛНЗ-ст $b_1 - b_k, b_3$ са ЛНЗ-ми. Това противоречи на (i) и доказва че от (i) => (ii)

(ii) => (iii) Ако $b_1 - b_k$ са ЛНЗ-ми и $\ell(b_1 - b_k) = \ell(b_1 - b_m)$ то всички останали вектори $b_{k+1} - b_m \in \ell(b_1 - b_m) = \ell(b_1 - b_k)$

(iii) => (i)
Ако $b_1 - b_k$ са ЛНЗ-ми и $b_{k+1} - b_m$ са в тяхната обвивка то => $b_1 - b_k, b_{k+1} - b_m$ са в $\ell(b_1 - b_m)$ = ПП-во =>
$\ell(b_1 - b_m) \subseteq \ell(b_1 - b_k) \subseteq \ell(b_1 - b_m)$ и $\ell(b_1 - b_m) = \ell(b_1 - b_k)$
Следователно за произволни $1 \le i_1 < \dots < i_{t+1} \le m$ имаме $b_i - b_{i_{t+1}} \in \ell(b_1 - b_m) = \ell(b_1 - b_k)$
По лемата за ЛЗ-ст $b_{i_1} - b_{i_{t+1}}$ са ЛЗ-ми и по деф $rk(b_1 - b_m) = r$. Ако $rk(b_1 - b_m) = r$ то съгласно условие 2, $\exists$ r-бат ЛНЗ-ми вектори $b_1 - b_k \in \ell(b_1 - b_k) = \ell(b_1 - b_m)$.
Следователно $b_1 - b_k$ е базис на $\ell(b_1 - b_m)$ и $\dim \ell(b_1 - b_m) = r$ (размерността е равна на ранга)

Деф $rk(0_{m \times n}) = 0$

Минор Деф минор от $r^{-ти}$ ред на $A \in M_{m \times n}(F)$ е детерминантата получена от $r \times r$ матрицата от A при пресичане на r реда $1 \le i_1 < \dots < i_r \le m$ с r стълба $1 \le j_1 < \dots < j_r \le m$

Матрицата $A \in M_{m \times n}(F) \setminus \{0_{m \times n}\}$ има ранг r, $rk(A) = r$, ако $\exists$ ненулев минор на A

от ред r и всички минори на A от ред $> r$ са нулеви

Съгласно развитието на детерминантата по елементите на произволен ред или стълб $rk(A) = r$ ако $\exists$ ненулев минор на A от ред r и всички минори на A от ред $r+1$ са нулеви

Т. за ранга на матрица и ранга на нейните вектор-редове и вектор-стълбове

Ако $A \in M_{m\times n}(F)$

$$A = \begin{pmatrix} - a_1 - \\ - a_i - \\ - a_m - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_j & b_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \text{ с } a_i = (a_{i1} \dots a_{in}) \in M_{1\times n}(F)$$

$$b_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F) \text{ то}$$

$$rk(A) = rk(a_1 \dots a_m) = rk(b_1 \dots b_n)$$

Доказ-во

Достатъчно е да установим $rk(A) = rk(a_1 \dots a_m)$ за $\forall A \in M_{m\times n}(F)$. Тогава от $A^t = \begin{pmatrix} b_1^t \\ b_2^t \\ b_n^t \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = rk(A^t)$

$$= rk(b_1^t \dots b_j^t \dots b_m^t) = rk(b_1 \dots b_m)$$

Ако $A = O_{m\times n}$ то $rk(O_{m\times n}) = 0$ и

$rk(a_1 = O_{1\times n} \dots a_m = O_{m\times n}) = 0$

От сега нататък A е ненулева ($A \neq O_{m\times n}$) матрица

Нека $rk(A) = r \in \mathbb{N}$ и матрицата

$$D = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} \end{pmatrix} \in M_{r\times r}(F) \text{ с}$$

$1 \le i_1 < \dots < i_r \le m$; $1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$

има $\det(D) \neq 0$

Тогава редовете $a_{i_1} - a_{i_r}$ на A са ЛНЗ-ни от св-во 5 на детерминантите. Достатъчно е да проверим че всеки друг ред $a_i \in \ell(a_{i_1} - a_{i_r})$ $i \in \{1 \dots m\} \setminus \{i_1 \dots i_r\}$ е тъжнала линейна обвивка за да получим $rk(a_1 - a_m) = r$ и да докажем теоремата. За всяко $i \in \{1 \dots m\} \setminus \{i_1 \dots i_r\}$ и $\forall 1 \le j \le n$ имаме

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} D_{r \times r} & a_{i_1 j} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i_r j} & \dots \; a_{ij} \end{pmatrix} \text{ има } \det(D_{ij}) = 0$$

За $j \in \{j_1 \dots j_r\}$ имаме $\det(D_{ij}) = 0$ като $\det$ с два равни стълба. За $j \in \{1 \dots n\} \setminus \{j_1 \dots j_n\}$ имаме $\det(D_{ij}) = 0$ като минор на A от ред $r+1$
Развиваме $\det(D_{ij})$ по адюнгирани количества относно последният стълб

$$0 = \det(D_{ij}) = \sum_{s=1}^{r} a_{is j} A(si) + a_{ij} (-1)^{(r+1)+(r+1)} \det(D)$$

където $A(si)$ не зависи от j. Следователно

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{r} - \frac{A(si)}{\det(D)} a_{is j} \text{ за } \forall 1 \le i \le n, \text{ тъй}$$

че $a_i = \sum_{s=1}^{r} - \frac{A(si)}{\det(D)} a_{is} \in \ell(a_{i_1} - a_{i_r})$. Оттук

$$\Rightarrow rk(a_1 - a_m) = r$$

Следствие
Следните твърдения са еквивалентни за $A \in M_{m \times n}(F)$

(i) $\det(A) = 0$
(ii) вектор-редовете $a_1 - a_m$ на $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ са ЛЗ-ни
(iii) вектор-стълбовете $b_1 - b_n$ на $A = (b_1 - b_n)$ са ЛЗ-ни

Док-во
Достатъчно е да установим че (i) $\Leftrightarrow$ (ii) за $\forall A \in M_{m \times n}(F)$, защото тогава $A^t = (b_1^t - b_n^t)$

и имаме $\det(A) = \det(A^t) = 0 \Leftrightarrow$ вектор-редовете $b_1^t - b_n^t$ на A^t са ЛЗ-ми $\Leftrightarrow$ вектор-стълбовете $b_1 - b_n$ на A са ЛЗ-ми

от (i) $\Rightarrow$ (ii)

Ако $\det(A) = 0$, $\text{гк}(A) \leq n-1$, съгласно Th $\Rightarrow$ че $\text{гк}(a_1 - a_n) \leq n-1$ и $a_1 - a_n$ са ЛЗ-ми

от (ii) $\Rightarrow$ (i)

Ако $a_1 - a_n$ са ЛЗ-ми то $\text{гк}(a_1 - a_n) \leq n-1$

Следователно $\text{гк}(A) \leq n-1$ и единственият минор на A от ред n е 0 $\Rightarrow \det(A) = 0$

Теорема на Руше.

Реализация на пространства от наредени n-торки които решения на хомогенни системи линейни уравнения (ХСЛУ)

Th 1

Нека (1) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{m\times 1}$ е ХСЛУ с матрица на коефициентите $A \in M_{m\times n}(F)$, която има ранг $\text{гк}(A) = r$. Тогава твърдим че множеството $U \subseteq F^n$ на решенията на (1) е ПП-во на пространството на F^n с размерност $= n-r$

$$\dim U = n-r$$

Док-во

Нека $u, v \in U$, $\lambda \in F$, Тогава $A(u+v)^t$

Ако $u \subseteq M_{n\times n}(F) \Rightarrow A(u+v)^t = A(u^t+v^t) = Au^t + Av^t = 0_{m\times 1} + 0_{m\times 1} = 0_{m\times n}$ и $u+v \in U$. Аналогично от заместване в системата с λu т.е.

$A = (\lambda u)^t = A(\lambda u)^t = \lambda A u^t = \lambda 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1} \Rightarrow$

$\lambda u \in U$ е ПП-во на F^n (наредените n-торки)

От $\text{гк}(A) = r \Rightarrow$ ∃ нето на r ЛНЗ-ми реда на A (уравнения на сист 1), така че всички останали уравнения зависят от тях. След елементарна трансформация на редовете на

А считаме че първите r реда са ЛНЗ-ни и $Ax = 0_{m\times 1}$ е еквивалентно на $A'x = 0_{r\times 1}$ за $A' = (a_1 - a_r)$ при условие $A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_r \end{pmatrix}$ при $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_r \\ a_m \end{pmatrix}$ с

$$rk(A') = r$$

След евентуална преномерация на неизвестните считаме първите r-стълба на A са ЛНЗ-ни С елементарни преобразувания само по редове свеждаме първите r стълба на A' към единична матрица E_r

След прилагане на същите елементарни преобразувания по редове към стълбовете с номера от $r+1$ - ви привеждаме хомогенната линейна система (2) $A'x = 0_{r\times 1}$ без промяна на решенията за A

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \square & \square \end{array}\right)\Big\}r \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} E_r & \begin{matrix} a_{1,r+1} \\ \vdots \\ * \end{matrix} \end{array}\right)\Big\}r$$

Неособена